BERNOULLIS EKVATION

Vid inkompressibel, stationär strömning längs strömlinjer samt längs röravsnitt med homogena förhållanden över tvärsnitt, vid försumbara effekter av friktion, gäller **Bernoullis ekvation**:[1]

$$p + \frac{\rho V^2}{2} + \rho g z = konst. \quad [z \text{ uppåt}]$$

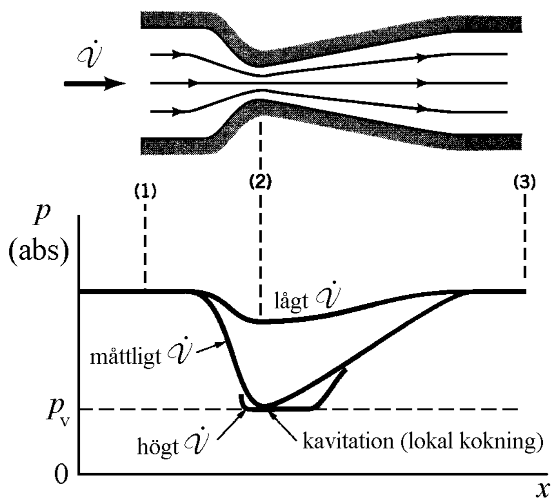
Speciellt försumbara effekter av gravitation (alt. horisontellt):

$$p + \frac{\rho V^2}{2} = konst.$$

Om hastigheten ökar minskar trycket, och vice versa.

Vätskeströmning, förträngning
Volymflöde, $\dot{\mathcal{V}} = VA = konst.$

Arean minskar ⇒
Hastigheten ökar
Bernoullis ekvation ⇒
Trycket minskar



Strömning kring vingprofil (NACA 4412), anfallsvinkel 5°

Tätare strömlinjer på
ovan-/framsidan ⇒
högre hastighet, lägre tryck
(lyftkraft)

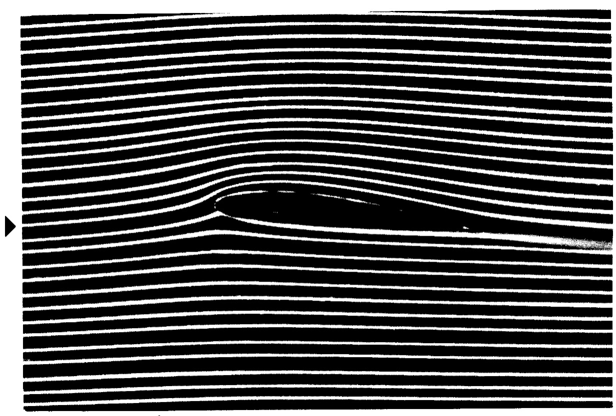


Fig. 123. α = 5°.

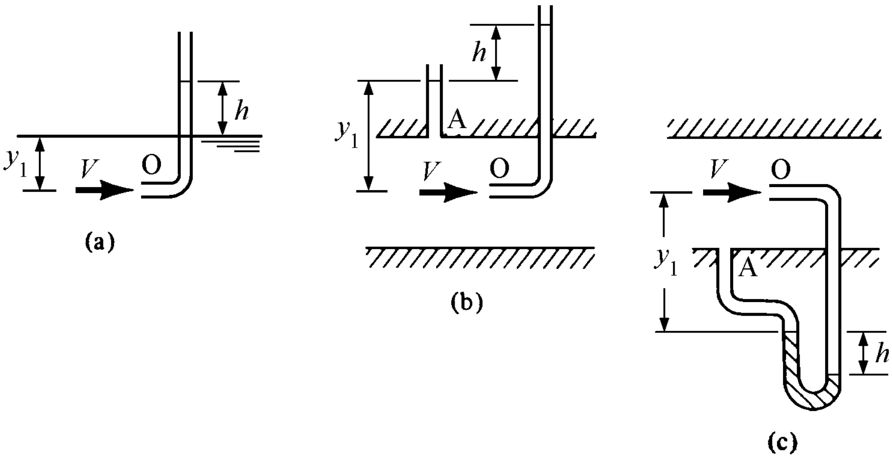
[1]Daniel Bernoulli, 1700–1782, Holland/Schweiz.

Förutsättningar: friktionsfri, inkompressibel, stationär strömning.

Horisontell strömlinje $\Rightarrow$ summan av statiskt och dynamiskt tryck konstant, $p+\rho V^2/2 = konst.$ — kan utnyttjas till hastighetsmätning. Om strömningen bromsas upp till hastigheten noll längs strömlinjen blir det statiska trycket i denna s.k. stagnationspunkt, $p_0 = p+\rho V^2/2$. Känd densitet ρ, uppmätt tryckdifferens $p_0 - p$ ger

$$V = \sqrt{2(p_0 - p)/\rho}$$

Pitotrör (eng. *Pitot tube*), Henri de Pitot (1732)



Ett 90° böjt rör med öppningen (O) riktad mot strömningen. I fall (a) och (b) strömmar vätska. I fall (b) och (c) antas strömningen rätlinjig, d.v.s. försumbar krökning av strömlinjer, statiskt tryckuttag vid (A); i fall (c) är (A) och (O) ihopkopplade som en U-rörsmanometer, manometervätskans densitet = ρ_m; godtycklig fluid med $\rho < \rho_m$; avläst höjdskillnad h.

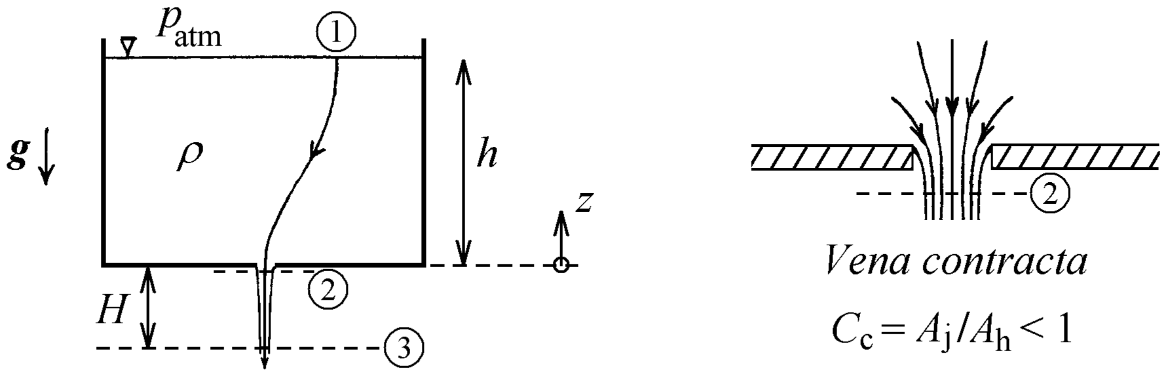
$$(a, b) : V = \sqrt{2gh}\ , (c) : V = \sqrt{2(\rho_m/\rho - 1)gh}$$

Prandtlrör (eng. *Pitot-static tube*)

Tryckuttagen A och O kombineras till en enda mätsond (Ludwig Prandtl, ca. 1910); mycket tillförlitlig; används mycket vid noggranna mätningar samt vid kalibrering, se Fig. 4-7.

TORRICELLIS TEOREM

Betrakta utströmning av vätska ur ett litet hål i botten på en stor öppen behållare. En strömlinje kan identifieras från ytan (1) och ut genom hålet (2) och vidare ned en sträcka H vid (3).



Stor behållare, litet hål (area A_h) $\Rightarrow$ vätskehöjden h konstant och ytans hastighet försumbar, $V_1 = 0$. Försumma tryckskillnaden i omgivande luft ($\rho \gg \rho_{air}$). Förutsätt stationär, inkompressibel och friktionsfri strömning längs strömlinjen. Om z är uppåt gäller enligt Bernoullis ekvation:

$$p_1 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{\rho V_2^2}{2} + \rho g z_2 = p_3 + \frac{\rho V_3^2}{2} + \rho g z_3$$

$z_1 = h$; $p_1 = p_2 = p_3 = p_{atm}$; $z_2 = 0$; $z_3 = -H$. Första likheten ger

$$\boxed{V_2 = \sqrt{2gh}} \qquad \textit{(Evangelista Torricelli 1643)}$$

Andra likheten ger $V_3 = \sqrt{2g(h+H)} > V_2$. Observera att hastigheterna är lika med de vid fritt fall för en fri kropp i vakuum.

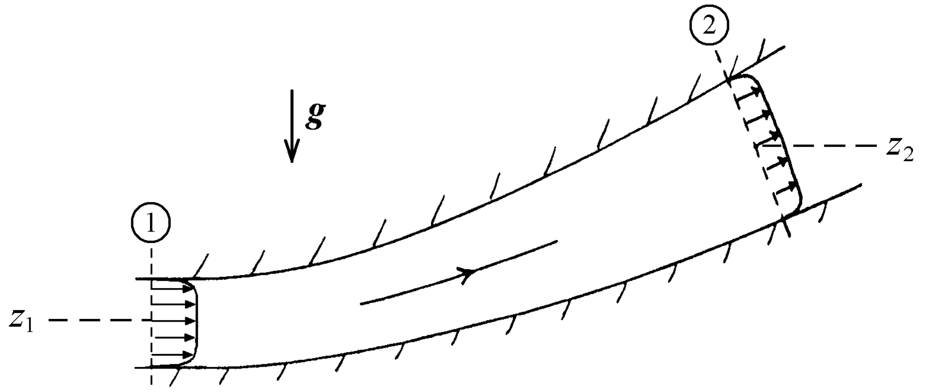
Om inte hålet är speciellt utformat kommer strålen att kontraheras vid utloppet (*vena contracta*). Om strålens utloppsarea är A_j gäller för skarpkantade hål: $A_j/A_h = C_c \simeq 0.61$, där $C_c \leq 1$ är den s.k. kontraktionskoefficienten, se Fig. 4-5. Massflöde:

$$\dot{m} = \rho A_j V_2 = \rho C_c A_h V_2 = \rho C_c A_h \sqrt{2gh}$$

Strålens area efter utloppet kommer att minska, $A_3 = A_j/\sqrt{1 + H/h}$, när strålen blir tillräckligt smal bildas droppar.

BERNOULLIS EKVATION — RÖRSTRÖMNING

Stationär, inkompressibel rörströmning.



- Volymflödet konstant, d.v.s.

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 = konst.$$

  V = medelhastighet; A = tvärsnittsarea.

- Hastighetsvariation över tvärsnitt oftast ganska liten (turbulent rörströmning, se Kap. 8).

- Över rörtvärsnitt med liten eller måttlig krökning är tryckvariationen hydrostatisk, $p + \rho\, g z = konst.$

- Om effekter av hastighetsvariation över tvärsnitt, krökning och friktion kan försummas gäller:

$$p_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} + \rho g z_1 = p_2 + \frac{\rho V_2^2}{2} + \rho g z_2$$

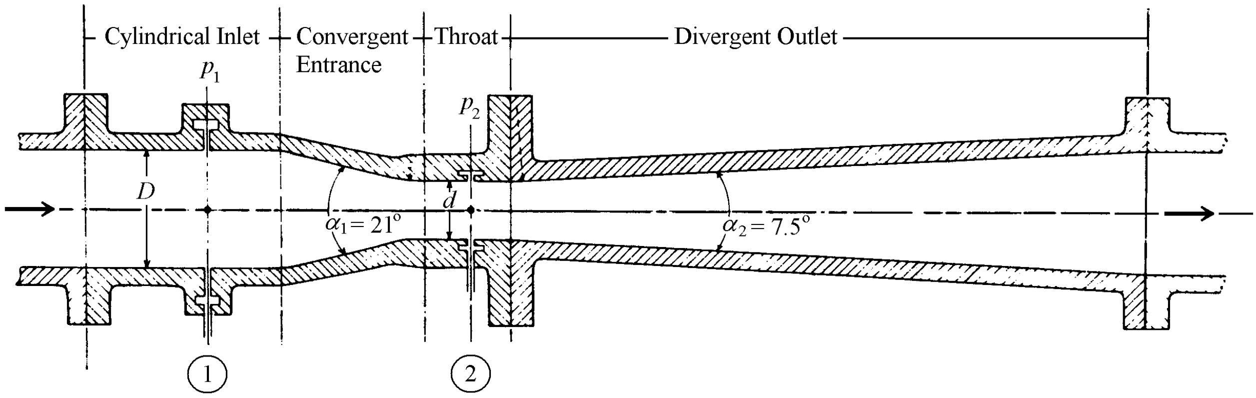
  p och z är tryck och lodrät höjd vid rörets mitt.

- Med friktion tillkommer en positiv term i högerledet, d.v.s. "totala" trycket $(p + \rho V^2/2 + \rho g z)$ sjunker i strömningsriktningen, se Kap. 8. Om även tekniskt arbetsutbyte (w_t) inkluderas fås *Bernoullis utvidgade ekvation*:

$$p_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} + \rho g z_1 = p_2 + \frac{\rho V_2^2}{2} + \rho g z_2 + \Delta p_\mathrm{f} + \rho w_\mathrm{t}$$

  där $\Delta p_\mathrm{f} > 0$, pumpar/fläktar: $w_\mathrm{t} < 0$; turbiner: $w_\mathrm{t} > 0$.

VENTURIMETER



Tryckuttag strax innan den konvergenta delen, vid sektion 1 (diameter D). Ett andra tryckuttag i den trängre passagen (sektion 2, diameter d). Uppmätt: tryckskillnaden $p_1 - p_2$. Sökt: massflöde $\dot{m}$.

- Stationär, inkompressibel strömning; fluidens densitet ρ.
- Hastighetsvariationer över tvärsnitt försummas, liksom effekter av friktion och gravitation (mellan 1 och 2).

Massbalans $\Rightarrow \dot{m} = \rho A V = konst.$
Konstant densitet, $\rho = konst. \Rightarrow V_1 A_1 = V_2 A_2$.
$A_1 = \pi D^2/4$; $A_2 = \pi d^2/4 \Rightarrow V_1/V_2 = A_2/A_1 = (d/D)^2$.

$$\text{Bernoullis ekvation:} \quad p_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho V_2^2}{2}$$

$$\text{Omskrivning:} \quad \frac{2(p_1 - p_2)}{\rho} = V_2^2 - V_1^2 = V_2^2\left[1 - (d/D)^4\right]$$

$$\text{Teoretiskt massflöde:} \quad \dot{m} = \frac{\pi d^2}{4}\sqrt{\frac{2\rho(p_1 - p_2)}{1 - (d/D)^4}}$$

$$\text{Verkligt massflöde:} \quad \dot{m} = c_\mathrm{d}\frac{\pi d^2}{4}\sqrt{\frac{2\rho(p_1 - p_2)}{1 - (d/D)^4}}$$

där c_d är en korrektionsfaktor (utströmningskoefficient). För en väl utformad venturimeter och höga Reynolds tal är $c_\mathrm{d} \approx 0.99$.